	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2019-2020** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	Modelo Orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cuatro a preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1 (2.5 puntos)

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78% de nitrógeno, un 21% de oxígeno y un 1% de argón.

a) (0.5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80%	20%	0%
B	70%	20%	10%
C	60%	40%	0%

A.2 (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\dfrac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0.5 puntos) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

A.3 (2.5 puntos)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = & z-1 \\ y = & 2-3z \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = & 4+5z \\ y = & 4z-3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

A.4 (2.5 puntos)

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0.55$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.90$ y $P(B|A) = 0.25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b) (0.5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

B.1 (2.5 puntos)

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1.5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

B.2 (2.5 puntos)

Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

b) (0.75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0.75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx$.

B.3 (2.5 puntos)

Dados los puntos $A(1, 1, -2)$, $B(3, -1, 4)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda, \\ z = 3 \end{cases}$ se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0, 0, 0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi \equiv z = 7$.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

B.4 (2.5 puntos)

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.

b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36ºC.

c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

Modelo Orientativo

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA EJERCICIO

En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.
a) Resultado: 0.25 puntos. Justificación: 0.25 puntos.
b) Definir las variables: 0.25 puntos. Plantear el sistema de ecuaciones: 1 punto. Resolver el sistema: 0.5 puntos. Interpretar el resultado: 0.25 puntos. (Si se plantea mal, pero se resuelve correctamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se valorará la resolución.)

Estándar de aprendizaje evaluado: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

Ejercicio 2.
a) Calcular la derivada: 0.25 puntos. Plantear la ecuación que determina el punto: 0.25 puntos. Calcular el punto: 0.25 puntos. Ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos.
b) Escribir el límite y ver que es una indeterminación: 0.25 puntos. Obtener el límite: 0.25 puntos.
c) Escribir la integral: 0.5 puntos. Obtener la primitiva: 0.25 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

Ejercicio 3.
a) Posición relativa: 1 punto (repartido en planteamiento: 0.5, resolución: 0.5). Distancia: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25).
b) Hallar el plano: 0.5 puntos. Obtener el punto de corte: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

Ejercicio 4.
a) Cada probabilidad pedida se evaluará con 0.5 puntos (repartidos en resultado: 0.25, justificación: 0.25).
b) Respuesta correcta: 0.25 puntos. Justificación: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.

a) Obtener el valor crítico ($t = 0$): 0.5 puntos (repartidos en planteamiento: 0.25, resolución: 0.25). Determinar el rango en cada uno de los dos casos ($[t = 0]$, $[t \neq 0]$): 0.25 puntos.

b) Deducir ($t = -1$): 1 punto (repartido en planteamiento: 0.5, resolución: 0.5). Resolver el sistema 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Clasifica y resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicio 2.

a) Calcular f': 0.25 puntos. Obtener la recta tangente: 0.25 puntos. Cortes con los ejes: 0.25 puntos. Área del triángulo: 0.25 puntos.
b) Asíntota vertical: 0.25 puntos. Asíntota horizontal: 0.25 puntos. Intervalos de decrecimiento: 0.25 puntos
c) Obtención de la primitiva: 0.5 puntos (repartidos en procedimiento: 0.25, cálculos: 0.25). Aplicación regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

Ejercicio 3.

a) Obtener el punto medio de A y B: 0.25 puntos. Hallar el punto Q: 0.5 puntos. Calcular el área del triángulo: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculos: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

Ejercicio 4.

a) Procedimiento: 0.5 puntos. Resultado: 0.25 puntos.
b) Calcular la probabilidad de que la temperatura sea mayor de 36º: 0.75 puntos. Obtener el número esperado de días: 0.25 puntos.
c) Resultado: 0.25 puntos. Justificación: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) Para 2000 litros de aire, según los porcentajes indicados, se precisan: 1560 litros de nitrógeno, 420 de oxígeno y 20 litros de argón.

b) Se tomarán x litros de mezcla A, y litros de mezcla B y z litros de mezcla C.

De acuerdo con los datos (x, y, z) debe satisfacer el sistema $\begin{cases} 0.8x + 0.7y + 0.6z = 1560 \\ 0.2x + 0.2y + 0.4z = 420, \\ 0.1y = 20 \end{cases}$ cuya solución es $(x = 1700, y = 200, z = 100)$.

Es decir son necesarios $\boxed{\text{1700 litros de mezcla A, 200 litros de mezcla B y 100 litros de mezcla C}}$.

Ejercicio 2

a) La abscisa x del punto buscado debe verificar que $f'(x) = 3/\mathrm{e}$.

$f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2} = \dfrac{3}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{3x-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1/3}$.

Para $x = 1/3$ se tiene $y = \mathrm{e}^{3\cdot 1/3-2} = \mathrm{e}^{-1}$ y en consecuencia, el punto pedido es $\boxed{(1/3, \mathrm{e}^{-1})}$.

La recta tangente tiene por ecuación $\boxed{y - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = \dfrac{3}{\mathrm{e}}\left(x - \dfrac{1}{3}\right)}$.

b) Usando la regla de L'Hôpital se tiene $\displaystyle\lim_{x\to 2/3} \frac{1 - \mathrm{e}^{3x-2}}{6x - 4} = \lim_{x\to 2/3} = \frac{-3\mathrm{e}^{3x-2}}{6} = -1/2.$

c) La abscisa del punto de corte entre la recta $y = 1$ y la curva $y = f(x)$ es $x = 2/3$. Como en $x = 0$ se tiene que $f(0) = \mathrm{e}^{-2} < 1$, el área pedida viene dada por $A = \displaystyle\int_0^{2/3} (1 - \mathrm{e}^{3x-2})\, dx = \left[x - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-2}\right]_0^{2/3} = \boxed{\frac{1}{3}(1 + \mathrm{e}^{-2})}$.

Ejercicio 3

a) El sistema $\left\{\begin{array}{rl} z - 1 = & 4 + 5z \\ 2 - 3z = & 4z - 3 \end{array}\right\}$ es incompatible, luego las rectas no se cortan.

Un vector director de r_1 es $\overrightarrow{u} = (1, -3, 1)$ y un vector director de r_2 es $\overrightarrow{v} = (5, 4, 1)$. Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, luego $\boxed{\text{las rectas se cruzan}}$.

Para hallar la distancia entre ellas obtenemos el plano τ que contiene a r_1 y es paralelo a r_2. Este plano está determinado por el punto $P(-1, 2, 0) \in r_1$ y los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Su ecuación implícita es $-7x + 4y + 19z - 15 = 0$.
La distancia entre las rectas es la distancia del punto $Q(4, -3, 0) \in r_2$ al plano τ:

$$d(Q, \tau) = \frac{|-28 - 12 - 15|}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2}}; \quad \boxed{d = \frac{55}{\sqrt{426}} \approx 2.665}.$$

b) Plano π que contiene a r_1 y pasa por el origen: $2x + y + z = 0$. Punto B de intersección de π y r_2 :

$$2(4 + 5\mu) + (-3 + 4\mu) + \mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{-1}{3} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{7}{3}, \frac{-13}{3}, \frac{-1}{3}\right)}.$$

Ejercicio 4

a) $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.90 = 0.10.$

$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.1}{P(A)} = 0.25 \Rightarrow P(A) = 0.4.$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.55 - 0.4 + 0.10 = 0.25.$

$P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0.25 - 0.1}{1 - 0.4} = 0.25.$

b) Como $P(B|\overline{A}) = P(B)$, B es independiente de A. (También se puede argumentar que son independientes porque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.)

SOLUCIONES
OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) La matriz A es equivalente, haciendo operaciones elementales de fila, a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Si } t \neq 0\text{: } \operatorname{rg}(A) = 2 \text{ y si } t = 0\text{: } \operatorname{rg}(A) = 1.}$$

b) Para que el sistema $AX = B$ sea compatible determinado, debe ser $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = 2$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & t & 3 \\ 0 & 0 & 3t+3 \end{array}\right),$$

de donde se concluye que $\boxed{t = -1}$.

Sustituyendo $t = -1$ se obtiene el sistema $\left\{ \begin{array}{r} x + y = 3 \\ -y = 3 \end{array} \right.$, que tiene por solución $\boxed{(x = 6, y = -3)}$.

Ejercicio 2

a) La recta tangente es $y = f(2) + f'(2)(x-2)$. Como $f(2) = 1$, $f'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} \to f'(2) = -\dfrac{1}{3}$, la tangente es $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$, que corta al eje OX en $P(5,0)$ y al eje OY en $Q(0,5/3)$. El área del triángulo es $\boxed{A = \dfrac{25}{6}}$.

b) El dominio de f es $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} = +\infty$. Por tanto la curva $y = f(x)$ tiene una $\boxed{\text{asíntota vertical: } x = -1}$. Por otra parte $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, luego hay una $\boxed{\text{asíntota horizontal: } y = 0}$.

Para estudiar el crecimiento vemos que $f'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$, por tanto que f es decreciente en cada uno de los intervalos en que está definida, es decir $\boxed{f \text{ es decreciente en } (-\infty, -1) \text{ y en } (-1, \infty)}$.

c) $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx = 3\int_0^2 \frac{x}{x+1}\, dx = 3\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[3(x - \ln(x+1))\right]_0^2 = \boxed{6 - 3\ln 3}$

Ejercicio 3

a) Calculamos los vértices del triángulo: El punto medio de A y B es $P(2,0,1)$. La recta que pasa por A y B tiene ecuación implícita $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 3x - z = 5 \end{array} \right.$ y corta al plano $z = 7$ en el punto $Q(4,-2,7)$.

$\boxed{\text{El área del triángulo es } \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\| = \frac{1}{2}\|(2,-10,-4)\| = \sqrt{30}}$.

b) Un vector normal al plano pedido es $(3,5,0)$ (vector director de r), por lo que la ecuación implícita del plano es de la forma $3x + 5y + 0z = d$. Para que pase por el punto A debe ser $d = 8$ y queda $\boxed{3x + 5y = 8}$.

c) Un vector director de r es $\overrightarrow{v_1} = (3,5,0)$ y un vector director de la recta que pasa por A y B es $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,3)$.

El coseno del ángulo formado por estos dos vectores es $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{374}} \approx 0.1034}$.

Ejercicio 4

Sea $X \sim N(30,5)$ la variable aleatoria "temperatura máxima" y $Z = \dfrac{x-30}{5}$ la variable normalizada asociada.

a) $P(28 < X < 32) = P(-0.4 < Z < 0.4) = 2P(Z < 0.4) - 1 = 0.3108$.

b) $P(X > 36) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) = 0.1151$. El número esperado de días es $30 \cdot 0.1151 \approx 3.45$.
$\boxed{\text{Cabe esperar que entre 3 y 4 días del mes se superen los 36º}}$.

c) Se trata de hallar a tal que $P(X > a) = 0.5$ y esto es justamente el valor medio de la variable. Luego $\boxed{\text{el día 10 de junio se alcanzaron } 30º}$.